Особенности решения геометрических задач при подготовке к ОГЭ и ЕГЭ

Мастер класс подготовила
учитель МБОУ СОШ с. Панино Добровского района
Гущина Юлия Владимировна

Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их.

Д. Пойа.

Методы решения геометрических задач.

геометрический – когда требуемое утверждение выводится с помощью логических рассуждений из ряда известных теорем;

алгебраический – когда искомая геометрическая величина вычисляется на основании различных зависимостей между элементами геометрических фигур непосредственно или с помощью уравнений;

комбинированный – когда на одних этапах решение ведется геометрическим методом, а на других – алгебраическим.

Геометрия полна приключений, потому что за каждой задачей скрывается приключение мысли. Решить задачу – это значит пережить приключение.

Вячеслав Викторович Произволов.

Геометрические методы: метод длин; метод треугольников; метод параллельных прямых; метод соотношений между сторонами и углами треугольника; метод четырехугольников; метод площадей; метод подобия треугольников; тригонометрический метод (метод, основанный на соотношениях между сторонами и углами треугольника, выраженными через тригонометрические функции); метод геометрических преобразований.

Наиболее часто допускаемые ошибки при решении задач.

1. Не внимательное чтение условия задачи.

2. Халатное построение чертежа (от руки, без чертежных инструментов).

3. Неправильный перенос данных задачи на чертеж (либо по незнанию, либо по небрежности).

4. Неумение проанализировать условие задачи и выявить неизвестные величины, возможность нахождения которых вытекает прямо из условия задачи.

5. Неумение применять формулы и теоремы к решению задач.

6. Несоблюдение этапов решения задачи.

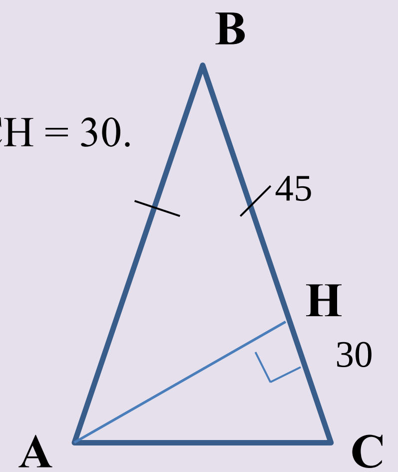
Этапы решения геометрических задач.

1. Чтение условия задачи.
2. Выполнение чертежа с буквенными обозначениями.
3. Краткая запись условия задачи.
4. Перенос данных на чертеж.
5. Анализ данных задачи.
6. Составление цепочки действий.
7. Запись решения задачи.
8. Запись ответа.

№1. В треугольнике ABC AB = BC, а высота AH делит сторону BC на отрезки BH = 45 и CH = 30. Найдите cosB.

Дано: ΔABC, AB = BC,
AH – высота,
H $\in$ BC, BH = 45, CH = 30.

Найти: cosB.



Анализ данных задачи.

1. О чем идет речь в условии задачи?
2. Что нам известно о треугольнике?
3. Что надо найти в задаче?
4. Из какой фигуры можно найти косинус острого угла?
5. Есть ли на рисунке прямоугольный треугольник?
6. Почему он прямоугольный?
7. Что называется косинусом острого угла прямоугольного треугольника?
8. Известны ли нам эти элементы?
9. Можно ли найти гипотенузу?

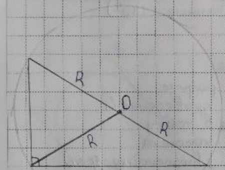
Составление цепочки действий.

1. Рассмотрим Δ ABH и докажем, что он прямоугольный.
2. Записать формулу для нахождения cosB.
3. Найдем сторону BC, зная что по условию она равна стороне AB.
4. Подставим все данные в формулу для нахождения cosB.
5. Запишем ответ.

№16

Окружность

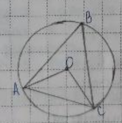
R – описанный радиус
r – вписанный радиус
диаметр – $D = 2R$



центр окружности лежит на гипотенузе (гипотенуза – диаметр)

радиус проведённый в вершину прямого угла является медианой

Медиана проведённая из прямого угла равна половине гипотенузы

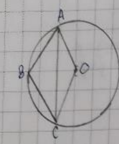


вершина всегда лежит в точке O (центральный угол)

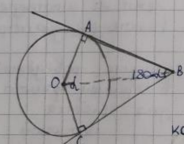
$\angle ABC$ – вписанный (вершина лежит на окружности)

Вписанный угол в 2 раза меньше центрального, если они лежат по одну сторону от хорды.

Частный случай

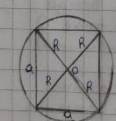


O – центральный для $\angle ABC$
(если углы лежат по разные стороны от хорды, то центральный больше 180°)



радиус проведённый в точку касания ⊥ (перпендикулярен) касательной

отрезок соединяющий центр окружности и точку B делит OABC на 2 одинаковых треугольника

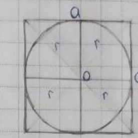


диагонали пересекаются в центре окружности

диагонали – диаметры

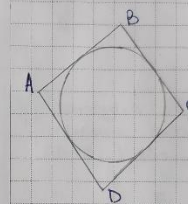
$D = a\sqrt{2} \Longrightarrow a = \frac{D}{\sqrt{2}}$

$R = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow R\sqrt{2} = a$



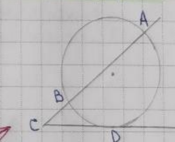
диагонали пересекаются в центре

$D = a \quad r = \frac{1}{2}a \Longrightarrow a = 2r$



$AB + CD = AD + BC$

$CD^2 = BC \cdot AC$



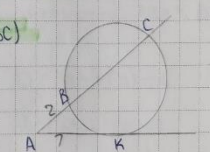
AC – секущая
CD – касательная

1. Через точку A, лежащую вне окружности проведены две прямые. Одна прямая касается окружности в точке K. Другая прямая пересекает окружность в точках B и C, причём $AB = 2$, $BC = 6$. Найти AK.

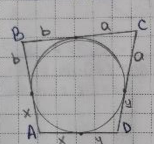
$AK^2 = AB \cdot AC = AB \cdot (AB + BC)$

$AK = \sqrt{AB(AB+BC)} = 16$

$AK = 4$



2. Четырёхугольник ABCD описан около окружности. $AB = 8$, $BC = 20$, $CD = 17$. Найти AD.

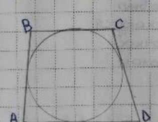


$\underbrace{AB}_{a+b} + \underbrace{CD}_{x+y} = \underbrace{AD}_{b+x} + \underbrace{BC}_{a+y}$

$AD = (AB + CD) - BC$

$AD = (8 + 17) - 20 = 5$

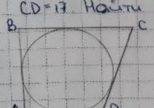
3. Трапеция ABCD с основаниями AD и BC описана около окружности. $AB = 11$, $BC = 6$, $CD = 9$. Найти AD.



$AD = (AB + CD) - BC$

$AD = (11 + 9) - 6 = 14$

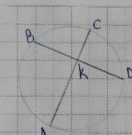
4. Трапеция ABCD с основаниями AD и BC описана около окружности. $AB = 7$, $BC = 5$, $CD = 17$. Найти AD.



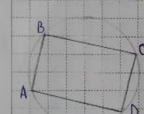
$AD = (AB + CD) - BC$

$AD = (7 + 17) - 5 = 19$

Окружность

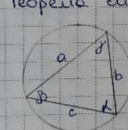


$AK \cdot BK = CK \cdot DK$



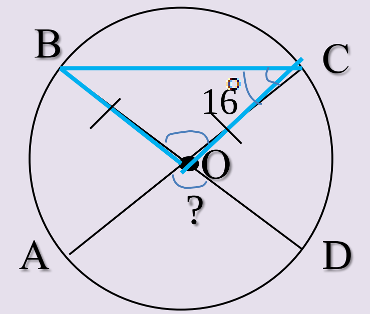
Произвольный вписанный четырёхугольник.
Сумма противоположных углов равна 180°
$\angle A + \angle C = 180°$
$\angle B + \angle D = 180°$

Теорема синусов:

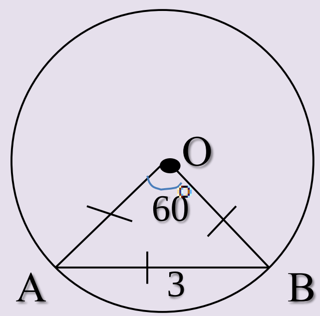


$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

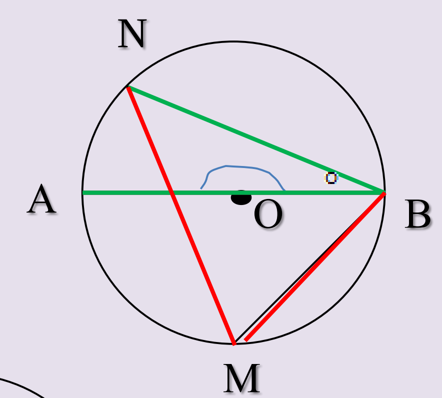
№2. AC и BD – диаметры окружности с центром O. Угол ACB равен 16°. Найдите угол AOD.



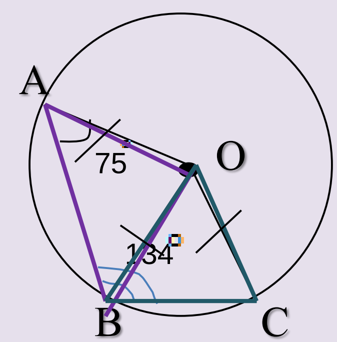
№3. Центральный угол AOB, равный 60°, опирается на хорду AB длиной 3. Найдите радиус окружности.



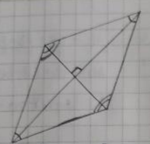
№4. AB – диаметр окружности с центром в точке O. Точки M и N лежат на окружности. Угол ABN равен 5°. Найдите угол NMB.



№5. Точка O – центр окружности, на которой лежат точки A, B, C. Известно, что ∠ABC = 134°, ∠ OAB = 75°. Найдите угол BOC.



Четырёхугольники



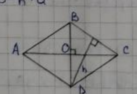
Ромб – частный случай параллелограмма

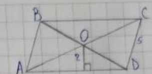
Свойства ромба:
1. противоположные стороны параллельны и равны
2. противоположные углы равны
3. диагонали всегда пересекаются под прямым углом и точкой пересечения делятся пополам
4. все стороны равны

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$

$S = 4S_{\triangle AOB} = 2 \cdot AO \cdot OB$

$S = h \cdot a$





Сторона ромба равна 5, а расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до неё равно 2. Найти площадь ромба.

$S_{ABCD} = 4S_{AOD} =$
$= 4 \cdot (\frac{1}{2} \cdot AD \cdot OH) = 2AD \cdot OH$
$S_{ABCD} = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$

Сторона ромба равна 12, а расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до неё равно 1. Найти площадь ромба

$S_{ABCD} = 2 \cdot 12 \cdot 1 = 24$

Сторона ромба равна 7, а расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до неё равно 3. Найти площадь ромба.

$S_{ABCD} = 2 \cdot 7 \cdot 3 = 42$

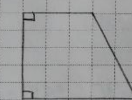
Трапеция

Виды трапеций:

1.

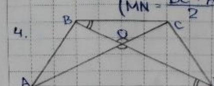
Равнобедренная
- боковые стороны равны
- углы при основании равны

2.



Прямоугольная
- 2 угла прямые

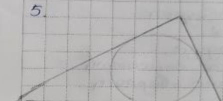
Свойства трапеций:
1. основания параллельны
2. сумма углов при боковой стороне 180°
3. средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме $(MN = \frac{BC + AD}{2})$
4.



$\triangle BOC \sim \triangle DOA$ (по 3 углам)
$\angle BOC = \angle AOD$ (вертикальные)
$\angle CBO = \angle ADO$ (накрестлежащие)
$BC \parallel AD$, BD – секущая

5. $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$
6. $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD}$

5.



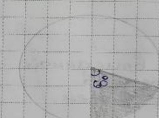
Периметр треугольника равен 50, одна из сторон равна 20, а радиус вписанной в него окружности равен 4. Найти площадь.

$P_{\triangle} = 50$
$a = 20$
$r = 4$

$S_{\triangle} = p \cdot r$ p – полупериметр

$S_{\triangle} = \frac{50}{2} \cdot 4 = 100$

6.



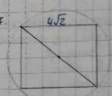
Площадь круга равна 90.
Найти площадь сектора этого круга, центральный угол которого 60°

$S = \pi R^2$, $\pi = 3{,}14$

$\pi R^2 = 360°$
$x = 60°$ $\Rightarrow x = \frac{\pi R^2 \cdot 60°}{360°}$

$S_{сектора} = \frac{S}{360°} \cdot \alpha$ α – центральный угол
$S_{сектора} = 15$

7.



Сторона квадрата равна $4\sqrt{2}$.
Найти радиус окружности, описанной около этого квадрата

$D = 2R$
$D = \sqrt{a^2 + a^2}$
$2R = \sqrt{2a^2}$
$2R = a\sqrt{2}$
$R = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$R = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4$

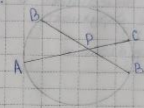
8.

Радиус вписанной окружности в квадрат равен $2\sqrt{2}$.
Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.

$R = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2r^2}$
$R = r\sqrt{2}$

$R = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4$

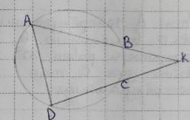
9.



Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке P
$BP = 15$
$CP = 6$
$DP = 10$
Найти AP

Решение:
$AP \cdot CP = BP \cdot DP$
$AP = \frac{BP \cdot DP}{CP} = \frac{15 \cdot 10}{6} = 25$

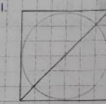
10.



Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Прямые AB и CD пересекаются в точке K
$BK = 8$ $DK = 2$ $BC = 6$
Найти AD

Решение:
$\triangle AKD \sim \triangle CKB$ (по 2м углам)
$\angle K$ - общий
$\angle ABC + \angle KBC = 180^\circ$ (смежные углы)
$\angle DAB + \angle DCB = 180^\circ$
$\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$
$\Longrightarrow \angle KBC = \angle ADC$
$\frac{AK}{CK} = \frac{KD}{KB} = \frac{AD}{CB}$ $\frac{AK}{CK} = \boxed{\frac{12}{8} = \frac{AD}{6}} \Rightarrow AD = \frac{12 \cdot 6}{8} = 9$

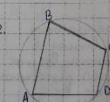
11.



Радиус вписанной в квадрат окружности равен $2\sqrt{2}$.
Найти диагональ квадрата

Решение:
a - сторона квадрата
$a = 2r \Longrightarrow a = 4\sqrt{2}$
$d = a\sqrt{2} \Longrightarrow d = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 8$

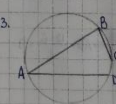
12.



Угол A четырёхугольника ABCD вписанного в окружность равен 82°
Найти угол C этого четырёхугольника

Решение:
$\angle A + \angle C = 180^\circ$
$\angle C = 180^\circ - \angle A$
$\angle C = 180^\circ - 82^\circ = 98^\circ$

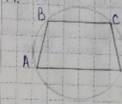
13.



Угол A четырёхугольника ABCD вписанного в окружность равен 37°
Найти угол C

$\angle C = 180^\circ - 37^\circ = 143^\circ$

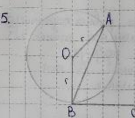
14.



Угол A трапеции ABCD с основаниями AD и BC вписанной в окружность равен 81°
Найти угол C

Решение:
$\angle A + \angle C = 180^\circ$
$\angle C = 180^\circ - 81^\circ = 99^\circ$

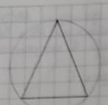
15.



На окружности отмечены точки A и B так, что меньшая дуга AB равна 92°. Прямая BC касается окружности в точке B так, что угол ABC острый.
Найти угол ABC

Решение:
$\triangle AOB$ - равнобедренный
$\angle OBA = \angle OAB$
градусная мера дуги равна центральному углу
$\angle AOB = 92^\circ$
$OB \perp BC$ (радиус проведён в точку касания)
$\angle ABC = \angle OBC - \angle OBA$
$\angle OBA = (180^\circ - \angle AOB) : 2 = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AOB$
$\angle ABC = 90^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\angle AOB) = \frac{1}{2}\angle AOB$

16.



Сторона равностороннего треугольника равна $2\sqrt{3}$
Найти радиус окружности описанной около этого треугольника

Решение:
$\frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3} = 2$

17.

Сторона равностороннего треугольника равна $2\sqrt{3}$
Найти радиус вписанной в этот треугольник

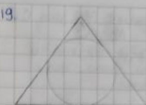
Решение:
$\frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{6} = 1$

18.

Радиус окружности вписанной в равносторонний треугольник равен 5.
Найти высоту

Решение.
$h = 3r$
$h = 3 \cdot 5 = 15$

19.



Радиус окружности вписанной в равносторонний треугольник равен $2\sqrt{3}$.
Найти длину стороны этого треугольника

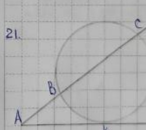
Решение:
$a = 2\sqrt{3} \cdot R$
$a = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}$
$a = 12$

20.

Радиус окружности описанной около равностороннего треугольника равен $2\sqrt{3}$.
Найти длину стороны треугольника.

Решение:
$a = R\sqrt{3}$
$a = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6$

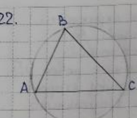
21.



Через точку A, лежащую вне окружности, проведены две прямые. Одна прямая касается окружности в точке K. Другая прямая пересекает окружность в точках B и C.
$AB = 2$ $AC = 8$
Найти AK

Решение:
$AK^2 = AC \cdot AB$
$AK = 4$

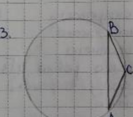
22.



В треугольнике ABC угол C равен 45°. $AB = 6\sqrt{2}$
Найти радиус окружности описанной около этого треугольника.

Решение:
$\frac{AB}{\sin\angle C} = 2R \Longrightarrow R = \frac{AB}{2\sin\angle C}$
$R = \frac{6\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 6$

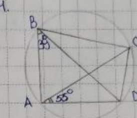
23.



В треугольнике ABC угол C равен 135°.
$AB = 14\sqrt{2}$
Найти радиус окружности описанной около этого треугольника

Решение:
$R = \frac{AB}{2\sin\angle C}$
$R = \frac{14\sqrt{2}}{2\sin 135^\circ} = \frac{14\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 14$

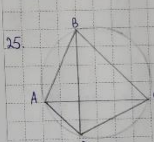
24.



Четырёхугольник ABCD вписан в окружность.
Угол ABD равен 39°
Угол CAD равен 55°
Найти угол ABC

Решение:
$\angle CAD = \angle CBD$ (опираются на одну дугу)
$\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD$
$\angle ABC = 39^\circ + 55^\circ = 94^\circ$

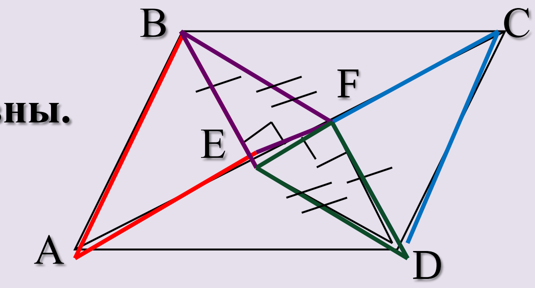
25.



Четырёхугольник ABCD вписан в окружность
Угол $ABD = 16^\circ$
Угол $CAD = 32^\circ$
Найти угол ABC

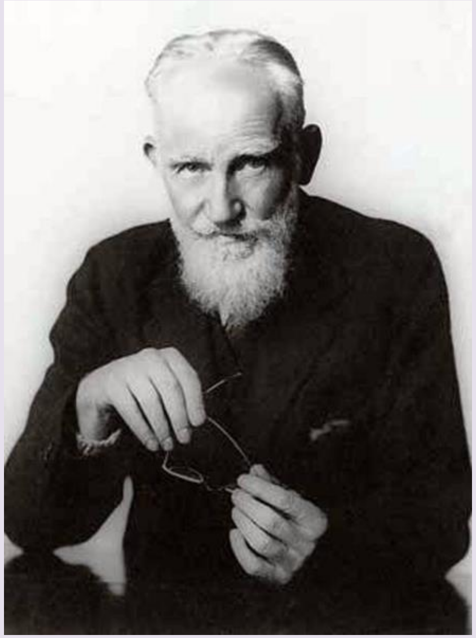
Решение:
$\angle ABC = 16^\circ + 32^\circ = 48^\circ$

№6. В параллелограмме ABCD проведены перпендикуляры BE и DF к диагонали AC. Докажите, что отрезки BF и DE равны.



Решение:

Джорж Бернард Шоу



Умение мыслить математически – одна из благороднейших способностей человека.